

1. Introduction au comportement particulier des polymères caoutchouteux

Le caoutchouc est un matériau quasi incompressible. Cela se traduit par une augmentation de sa rigidité s'il n'est pas libre de se déformer. C'est un matériau non-linéaire dont le comportement est régi par des lois de type hyperélastique. Il peut subir jusqu'à 300% de déformation et possède une élasticité multidirectionnelle. Il a un pouvoir amortissant important dû à une dissipation de l'énergie de déformation sous forme thermique. Ces propriétés dépendent bien évidemment de sa composition.

1.1 Les matériaux hyperélastiques

Un milieu est dit « **hyperélastique** » s'il existe une configuration de référence telle que, à chaque instant,

- l'énergie libre massique \mathbf{y} est une fonction de la température T et du tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} .
- la dissipation intrinsèque volumique \mathbf{j} est nulle.

Ce type de comportement est très bien adapté pour des matériaux pouvant subir de très grandes déformations élastiques réversibles et donc avec des matériaux caoutchouteux. Dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, le second principe ou inégalité de Clausius Duhem s'écrit

$$\mathbf{j} + \mathbf{j}_{therm} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{r} \left(\dot{\mathbf{y}} + s \dot{T} \right) - q \frac{\nabla T}{T} \geq 0$$

Où \mathbf{S} est le second tenseur de Piola-Kirchhoff

\mathbf{E} est le tenseur des déformations de Green-Lagrange

\mathbf{y} est l'énergie libre massique

s est l'entropie

q est le flux de chaleur

T est la température

En utilisant la première hypothèse régissant les milieux hyperélastiques

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(E, T, V_k)$$

Où V_k sont les forces thermodynamiques associées aux variables internes A_k ; Dans ce cas l'égalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\underbrace{\left(\mathbf{S} - \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial V_k} \dot{V}_k}_{\mathbf{j}} - \underbrace{\mathbf{r} \left(s + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T} \right) \dot{T} - q \frac{\nabla T}{T}}_{\mathbf{j}_{therm}} \geq 0$$

En appliquant les deux hypothèses des milieux hyperélastiques, la première quantité associée à la dissipation intrinsèque volumique est nulle. De plus, la seule variable interne considérée est le tenseur des déformation de Green-Lagrange, le terme relatif à la dissipation due aux forces thermodynamiques est donc nul, il reste

$$\mathbf{j} = \left(\mathbf{S} - \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{E}} \right) : \dot{\mathbf{E}} = 0$$

Sachant que cette relation est valable à chaque instant, on en déduit

$$S = \mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial E}$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est donc entièrement déterminé si on connaît la loi d'état $(T, E) \rightarrow \mathbf{y}$. On voit ici, un exemple de la relation étroite entretenue entre la mécanique et la thermodynamique.

On peut alors introduire, le tenseur de Cauchy-Green droit C :

$$C = 2E - I = F^T F$$

Où F est le tenseur gradient de la déformation

Après calcul, il vient

$$S = 2\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial C}$$

A l'aide de la relation de transformation de Piola (transport convectif), on relie le second tenseur de Piola-Kirchhoff au tenseur des contraintes de Cauchy, soit

$$\mathbf{s} = J^{-1} F S F^T$$

avec $J = \det F$

Dans le cas d'un matériau isotrope, le principe d'indifférence matérielle¹ permet d'exprimer les variables dont dépend la fonction d'énergie libre massique \mathbf{y} . Dans notre cas, cette densité d'énergie est liée aux invariants principaux du tenseur de Cauchy-Green droit, il vient

$$\mathbf{y}(E) = \mathbf{y}(I_I, I_{II}, I_{III})$$

Où les I_i sont les trois invariants principaux du tenseur C . On rappelle que les invariants d'un tenseur du second ordre A sont donnés par les relations :

$$I_I = A_{pp} = \text{tr} A$$

$$I_{II} = \frac{1}{2} (A_{pp} A_{qq} - A_{qp} A_{pq}) = \frac{1}{2} ((\text{tr} A)^2 - A : A) = \frac{1}{2} ((\text{tr} A)^2 - \text{tr}(A^2))$$

$$I_{III} = \mathbf{e}_{pqr} A_{p1} A_{p2} A_{p3} = \det A$$

Dans notre cas les matériaux étudiés sont incompressibles, le troisième invariant est donc égal à l'unité ; il en résulte que la fonction densité d'énergie est recherchée sous la forme d'une fonction du premier et deuxième invariants, c'est à dire

$$I_{III} = 1 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}(I_I, I_{II})$$

1.2. Modèles de densité d'énergie

1.2.1. Modèle de Mooney-Rivlin

On recherche le potentiel \mathbf{y} sous la forme d'un développement en série de Taylor, c'est à dire sous la forme

$$\mathbf{y} = \sum_{i,j} C_{ij} (I_I - 3)^i (I_{II} - 3)^j$$

Cette décomposition est assez bien adaptée pour des déformations relativement « faibles ». Les coefficients C_{ij} sont des constantes matérielles obtenus par des essais conventionnels (voir essais expérimentaux et états de contraintes particuliers).

¹ Principe stipulant qu'une loi de comportement doit être indépendante du référentiel d'observation, c'est à dire qu'elle est par définition intrinsèque au matériau.

Remarquons que, pour tous les caoutchoucs, on peut mettre expérimentalement en évidence la dépendance avec les deux premiers invariants des dérivées partielles premières de la fonction \mathbf{y} , et l'on ne peut donc espérer un modèle linéaire en I_I et I_{II} totalement satisfaisant.

Nous utiliserons cependant, cette densité d'énergie avec un développement à deux paramètres. Sous LS DYNA, le matériau utilisé est le matériau 27 (Voir annexes et fichiers PDF de LS DYNA).

1.2.2. Hypothèse de séparabilité de Valanis-Landel – Modèle d'Ogden

Valanis et Landel, on fait l'hypothèse que la fonction densité d'énergie pouvait s'écrire comme étant la somme de trois potentiels découplés fonctions des elongations principales (valeurs propres du tenseur gradient de la transformation). Dans ces conditions, l'hypothèse de séparabilité de Valanis-Landel, s'écrit :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{i=3} \mathbf{y}_i(I_i)$$

Cependant, certaines expériences (notamment essais de gonflement et extensions d'un cylindre) montrent que dans certains cas, cette hypothèse n'est pas justifiée.

Modèle d'Ogden

En utilisant l'hypothèse de séparabilité de Valandis-Landel, Ogden postule pour une densité d'énergie fonction fonctions des trois elongations principales. Cette fonction est donnée par la relation

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^3 \frac{\mathbf{m}_n}{\mathbf{a}_n} \left(\sum_{i=1}^3 I_i^{\mathbf{a}_n} - 3 \right)$$

Cette densité fournit une excellente corrélation avec les données expérimentales pour des elongations inférieures à 7 en traction simple et inférieures à 4 en cisaillement pur et traction équi-biaxiale. Les paramètres de ce modèle sont déterminés à l'aide d'essais conventionnels. Vous utiliserez ce modèle sous LS DYNA pour comparer vos résultats numériques obtenus avec le modèle de Mooney-Rivlin.

1.3. essais expérimentaux et états de contraintes particuliers

Après quelques calculs, on obtient la relation théorique liant les contraintes réelles principales (Contraintes de Cauchy) aux elongation principales :

$$\mathbf{s}_i = I_i \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial I_i} - p$$

Où p désigne une pression hydrostatique arbitraire associée à la contrainte interne d'incompressibilité.

1.3.1. Le premier essai conventionnel : Traction simple

Pour un état de traction simple, l'état de contrainte résultant s'écrit

$$\mathbf{s}(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation F est alors donné par

$$F(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{I}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{I}} \end{pmatrix}$$

Sur la figure 1, on représente la courbe contrainte-élongation d'un caoutchouc sollicité en traction.

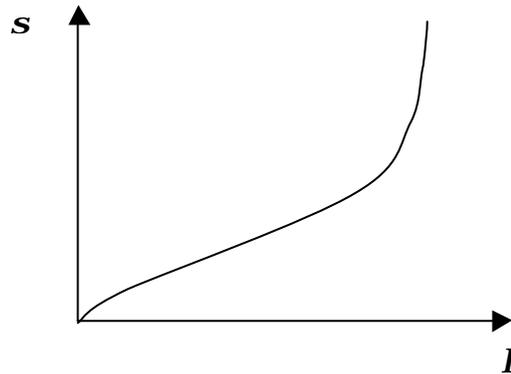


Figure 1 - Courbe contrainte-élongation

1.3.2. Traction biaxiale

Pour un état de traction biaxiale, l'état de contrainte résultant s'écrit

$$\mathbf{s}(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation F est alors donné par

$$F(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I^2} \end{pmatrix}$$

1.3.3. Cisaillement pur

Pour un état de cisaillement pur, l'état de contrainte résultant s'écrit

$$\mathbf{s}(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le gradient de la transformation F est alors donné par

$$F(M, X_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I} \end{pmatrix}$$